

Dynamique terrestre, pendule de Foucault et système de points matériels

Dans la première section de ce chapitre, on va considérer la terre comme un référentiel accéléré en rotation propre. Dans la deuxième section, on verra que la rotation de terre est mise en évidence par la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault. Finalement, on examinera en détails les propriétés et les lois de conservation physiques d'un système de points matériels.

11.1 Dynamique terrestre

Jusqu'à présent, on a considéré la terre comme un référentiel d'inertie. En réalité, la terre n'est pas un référentiel d'inertie puisqu'elle tourne sur elle-même et que son centre de masse est en rotation autour du soleil. Pour de nombreux systèmes physiques à une échelle de temps donnée, on peut très bien négliger le mouvement de rotation de la terre. Dans ce chapitre, on verra que cela n'est pas toujours le cas. La période de rotation de la terre sur elle-même est de 1 jour alors que la période de rotation de la terre autour du soleil est de 365.24 jours. Par conséquent, on peut négliger la norme $\Omega' = 1.99 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ de la vitesse angulaire de rotation de la terre autour du soleil par rapport à la norme $\Omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ de la vitesse angulaire de rotation propre de la terre sur elle-même. La dynamique terrestre est le mouvement de rotation propre du référentiel relatif de la terre par rapport à un référentiel absolu fixe. En réalité, la terre est un ellipsoïde de révolution dont le rayon polaire $r_- = 6357 \text{ km}$ est légèrement inférieur au rayon équatorial $r_+ = 6378 \text{ km}$. L'ellipsoïde de révolution est dû à la force centrifuge $\mathbf{F}_c$ qui provoque un aplatissement aux pôles terrestres. Etant donné que l'excentricité $e \ll 1$ de l'ellipsoïde de révolution terrestre est très faible,

$$e = \sqrt{1 - \frac{r_-^2}{r_+^2}} = 0.08 \quad (11.1)$$

on va à présent considérer que la terre est une sphère de rayon $r = 6371 \text{ km}$ dont le volume est identique à l'ellipsoïde de révolution terrestre.

11.1.1 Champ gravitationnel terrestre

On considère l'observateur comme un point matériel P de masse m à la surface de la terre. On associe au référentiel absolu fixe le repère absolu $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$ et au référentiel relatif de la terre en rotation propre le repère relatif $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$. L'angle nodal θ d'inclinaison de l'axe Ay_3 par rapport à l'axe Ox_3 est l'angle complémentaire à la latitude λ , c'est-à-dire $\theta = \pi/2 - \lambda$ (Fig. 11.1). La vitesse angulaire de rotation propre de la terre par rapport est constante,

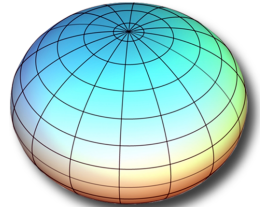
$$\mathbf{\Omega} = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0} \quad (11.2)$$

Ainsi, la force d'Euler est nulle, c'est-à-dire $\mathbf{F}_E = \mathbf{0}$, et la loi de mouvement relatif (10.60) du point matériel P se réduit à,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (11.3)$$



Rotation de la terre



Ellipsoïde de révolution

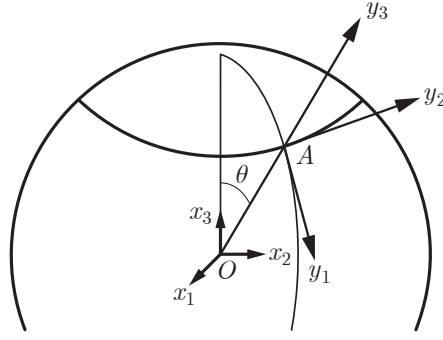


FIGURE 11.1 Le repère absolu $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ est associé au référentiel absolu fixe et le repère relatif $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ est associé au référentiel relatif de la terre en rotation propre. Le point A se situe au niveau de la mer sous le point P et entre les points O et P .

Par rapport au référentiel absolu fixe, le mouvement du point A est un mouvement circulaire uniforme de latitude constante autour de l'axe de rotation Ox_3 de la terre. Ainsi, son accélération est centripète, ce qui implique que la force inertielle (10.53) s'écrit,

$$\mathbf{F}_i = -m \mathbf{a}_a(A) = -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OA}) \quad (11.4)$$

où $\mathbf{OA}$ est le vecteur position du niveau de la mer A sous le point matériel P . A l'aide du vecteur position relative $\mathbf{r}_r(P) = \mathbf{AP}$, la force centrifuge (10.54) s'écrit,

$$\mathbf{F}_c = -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AP}) \quad (11.5)$$

Compte tenu de la force inertielle (11.4), de la force centrifuge (11.5) et de la force de Coriolis (10.55), la loi du mouvement relatif (11.3) du point matériel P devient,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} - m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{OA} + \mathbf{AP})) - 2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) = m \mathbf{a}_r(P) \quad (11.6)$$

Pour déterminer l'effet de la rotation de la terre sur le champ gravitationnel terrestre, on considère un pendule à l'équilibre dans le référentiel relatif de la terre. A l'équilibre, la vitesse relative et l'accélération relative sont nulles,

$$\mathbf{v}_r(P) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_r(P) = \mathbf{0} \quad (11.7)$$

A l'équilibre, la loi du mouvement relatif (11.6) donne la condition d'équilibre,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} - m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{OA} + \mathbf{AP})) = \mathbf{0} \quad (\text{équilibre}) \quad (11.8)$$

A présent, on fait l'approximation que le rayon terrestre moyen $r = \|\mathbf{OA}\|$ est beaucoup plus grand que la distance $\|\mathbf{AP}\|$ qui sépare le point matériel P du niveau de la mer,

$$\|\mathbf{AP}\| \ll \|\mathbf{OA}\| \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{OP} \simeq \mathbf{OA} \quad (11.9)$$

Les forces extérieures qui sont exercées sur le point matériel P sont son poids $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$ ainsi que la tension $\mathbf{T}$ le long du fil du pendule (Fig. 11.2). Par conséquent, la condition d'équilibre (11.8) devient,

$$\mathbf{P} + \mathbf{T} - m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OA}) = \mathbf{0} \quad (\text{équilibre}) \quad (11.10)$$

Le champ gravitationnel terrestre $\mathbf{g}$ est défini par rapport au référentiel absolu fixe. Pour obtenir l'expression du champ gravitationnel terrestre apparent $\mathbf{g}'$ exprimé par rapport au référentiel relatif terrestre, on suspend le point matériel à un fil de masse négligeable et on attend qu'il atteigne un état d'équilibre dans le référentiel relatif terrestre. Le poids $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$ est dû uniquement à l'attraction gravitationnelle de la terre et est orienté vers le centre de la terre O . Le poids apparent $\mathbf{P}' = m \mathbf{g}'$ est dû à l'attraction gravitationnelle de la terre et à la rotation de la terre qui compense la tension du fil $\mathbf{T}$ à l'équilibre dans le référentiel relatif de la terre,

$$\mathbf{P}' + \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{P}' = -\mathbf{T} \quad (\text{équilibre}) \quad (11.11)$$

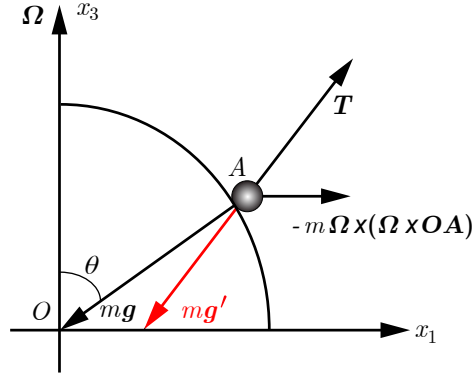


FIGURE 11.2 Le poids $m\mathbf{g}$, la tension dans le fil $\mathbf{T}$ et la force centrifuge $-m\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{OA})$ agissent sur le point matériel P à la surface de la terre.

Compte tenu du poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, la condition d'équilibre (11.10) donne la tension dans le fil,

$$\mathbf{T} = -m(\mathbf{g} - \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{OA})) \quad (11.12)$$

Ainsi, le poids apparent (11.11) devient,

$$\mathbf{P}' = m\mathbf{g}' = -\mathbf{T} = m(\mathbf{g} - \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{OA})) \quad (11.13)$$

On en conclut que le champ gravitationnel apparent $\mathbf{g}'$ est lié au champ gravitationnel réel $\mathbf{g}$ de la manière suivante,

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{OA}) \quad (11.14)$$

La différence entre le champ gravitationnel réel $\mathbf{g}$ et le champ gravitationnel apparent $\mathbf{g}'$ est dû à l'accélération centripète $\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{OA})$ engendrée par la rotation propre de la terre qui est orientée orthogonalement vers l'axe de rotation de la terre. La différence entre les champs gravitationnel est,

$$\mathbf{g} - \mathbf{g}' = -(g - g')\hat{\mathbf{x}}_1 \quad \text{où} \quad g > g' \quad (11.15)$$

A l'aide du rayon terrestre moyen $r = \|\mathbf{OA}\|$, l'accélération centripète terrestre est,

$$\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{OA}) = \Omega^2 r \hat{\mathbf{x}}_3 \times (\hat{\mathbf{x}}_3 \times (\sin \theta \hat{\mathbf{x}}_1 + \cos \theta \hat{\mathbf{x}}_3)) = -r \Omega^2 \sin \theta \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (11.16)$$

Compte du fait que l'angle de latitude λ est l'angle complémentaire de l'angle nodal θ ,

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \text{ainsi} \quad \sin \theta = \cos \lambda \quad (11.17)$$

on obtient par comparaison des relations (11.15) et (11.16) la norme du champ gravitationnel apparent en fonction du champ gravitationnel réel (Fig. 11.2),

$$g' = g - r \Omega^2 \sin \theta = g - r \Omega^2 \cos \lambda \quad (11.18)$$

Ainsi, le champ gravitationnel apparent est minimal à l'équateur, où $\lambda = 0$ et $\cos \lambda = 1$, dû à l'action de la force centrifuge qui s'oppose à la force de la gravitation dans le référentiel terrestre,

$$g' = g - r \Omega^2 \quad (\text{équateur}) \quad (11.19)$$

Le champ gravitationnel apparent est maximal aux pôles, où $\lambda = \pm\pi/2$ et $\cos \lambda = 0$, car la force centrifuge est nulle sur l'axe de rotation de la terre,

$$g' = g \quad (\text{pôles}) \quad (11.20)$$

Cette différence de comportement du champ gravitationnel entre l'équateur et les pôles est la raison pour laquelle la terre a une forme d'ellipsoïde de révolution puisque la gravitation

l'appatit plus aux pôles qu'à l'équateur. Le champ gravitationnel apparent à Lausanne, où $\lambda = 0.80$ et $\cos \lambda = 0.69$, est le suivant,

$$g' = g - 0.69 r \Omega^2 \quad (\text{Lausanne}) \quad (11.21)$$

La correction relative due à la rotation de la terre dans l'expression du champ gravitationnel à Lausanne est très faible,

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{g - g'}{g} = \frac{0.69 r \Omega^2}{g} = \frac{0.69 \cdot 6.371 \cdot 10^6 \cdot (7.27 \cdot 10^{-5})^2}{9.81} = 0.24\% \quad (11.22)$$

ce qui implique que la terre est quasiment une sphère. La correction relative est si faible qu'on va dorénavant considérer que le poids apparent $\mathbf{P}' = m \mathbf{g}'$ est égal au poids réel $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$ en première approximation et qu'il est donc orienté vers le centre de la terre O .

11.1.2 Mouvement relatif vertical

Dans cette section, on aimerait décrire l'influence de la rotation de la terre sur un objet dont le mouvement a lieu initialement selon l'axe vertical, c'est-à-dire un tir vertical ou un mouvement de chute libre à la surface de la terre. Pour alléger l'écriture, le repère relatif associé au référentiel relatif terrestre sera dénoté $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ (Fig. 11.3).

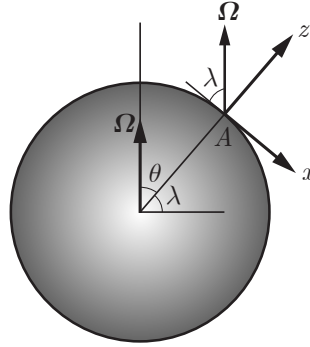


FIGURE 11.3 L'axe Ax est orienté vers le sud, l'axe Ay est orienté vers l'est et l'axe Az est vertical.

La seule force extérieure est le poids apparent $\mathbf{P}'$ qui est égal en première approximation au poids réel $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P}' = \mathbf{P} \quad (11.23)$$

qui contient la force inertielle $\mathbf{F}_i$. De plus, la force centrifuge $\mathbf{F}_c$ (11.5) est négligeable par rapport à la force inertielle (11.4) car $\|\mathbf{AP}\| \ll \|\mathbf{OA}\|$. Ainsi, la loi du mouvement relatif (10.58) est entièrement déterminée par le poids $\mathbf{P}$ et la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$,

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (11.24)$$

Les grandeurs cinématiques sont exprimées dans le repère relatif comme (Fig. 11.3),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= -\Omega \cos \lambda \hat{\mathbf{x}} + \Omega \sin \lambda \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{v}_r(P) &= \dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{a}_r(P) &= \ddot{x} \hat{\mathbf{x}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{y}} + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (11.25)$$

et le poids s'écrit,

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} = -mg \hat{\mathbf{z}} \quad (11.26)$$

Compte tenu des grandeurs cinématiques (11.25), la force de Coriolis est exprimée dans le repère relatif comme,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= -2m(-\Omega \cos \lambda \hat{\mathbf{x}} + \Omega \sin \lambda \hat{\mathbf{z}}) \times (\dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}) \\ &= 2m\Omega \dot{y} \sin \lambda \hat{\mathbf{x}} - 2m\Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) \hat{\mathbf{y}} + 2m\Omega \dot{y} \cos \lambda \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (11.27)$$

En projetant la loi vectorielle du mouvement relatif (11.24) selon les lignes de coordonnées

relatives de vecteurs unitaires $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$ respectivement, compte tenu du poids (11.26), de la force de Coriolis (11.27) ainsi que de l'accélération relative (11.25), on obtient trois équations scalaires,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{x} : \quad & 2m\Omega \dot{y} \sin \lambda = m\ddot{x} \\ \text{selon } \hat{y} : \quad & -2m\Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) = m\ddot{y} \\ \text{selon } \hat{z} : \quad & -mg + 2m\Omega \dot{y} \cos \lambda = m\ddot{z} \end{aligned} \quad (11.28)$$

En divisant les équations du mouvement (11.28) par la masse, on obtient les composantes de l'accélération relatives,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\Omega \dot{y} \sin \lambda \\ \ddot{y} &= -2\Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega \dot{y} \cos \lambda \end{aligned} \quad (11.29)$$

Les conditions initiales sur la position relative verticale et la vitesse relative verticale sont,

$$\mathbf{r}_r(0) = z_0 \hat{z} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_r(0) = v_0 \hat{z} \quad (11.30)$$

Compte tenu des conditions initiales (11.30), les équations des vitesses, obtenues en intégrant les équations du mouvement (11.28) par rapport au temps de 0 à t , sont données par,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\Omega y \sin \lambda \\ \dot{y} &= -2\Omega \left((z - z_0) \cos \lambda + x \sin \lambda \right) \\ \dot{z} &= v_0 - gt + 2\Omega y \cos \lambda \end{aligned} \quad (11.31)$$

La substitution des équations des vitesses (11.31) dans l'équation du mouvement le long de l'axe Ay s'écrit,

$$\ddot{y} = -2\Omega \cos \lambda (v_0 - gt + 2\Omega y \cos \lambda) - 2\Omega \sin \lambda (2\Omega y \sin \lambda) \quad (11.32)$$

Comme la norme de la vitesse angulaire de rotation de la terre Ω est très faible, on peut négliger les termes en Ω^2 . Au 1^{er} ordre en Ω , l'équation du mouvement (11.32) se réduit alors à,

$$\ddot{y} = -2\Omega \cos \lambda (v_0 - gt) \quad (11.33)$$

Compte tenu des conditions initiales sur le mouvement vertical,

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (11.34)$$

en intégrant l'équation du mouvement (11.33), on obtient l'équation de la vitesse selon l'axe Ay ,

$$\dot{y}(t) = -\Omega \cos \lambda (2v_0 t - gt^2) \quad (11.35)$$

En intégrant ensuite l'équation de la vitesse (11.35) selon l'axe Ay , on obtient l'équation horaire selon l'axe Ay ,

$$y(t) = -\Omega \cos \lambda \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} gt^3 \right) \quad (11.36)$$

En substituant l'équation horaire (11.36) dans les équations de la vitesse (11.31), on obtient au 1^{er} ordre en Ω ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2\Omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} gt^3 \right) \simeq 0 \\ \dot{z} &= v_0 - gt - 2\Omega^2 \cos^2 \lambda \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} gt^3 \right) \simeq v_0 - gt \end{aligned} \quad (11.37)$$

Les équations horaires selon les axes Ax et Az sont obtenues en intégrant les équations de la vitesse (11.37) par rapport au temps,

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + z_0 \end{aligned} \quad (11.38)$$

Ainsi, au premier ordre en Ω , les équations horaires dans le plan vertical Axz sont identiques aux équations horaires (3.15) d'un mouvement balistique où la terre est considérée comme un référentiel absolu. La déviation due à la force de Coriolis est donnée par l'équation horaire (11.36) selon l'axe Ay .

A titre d'exemple, on considère une balle lancée de la surface de la terre, c'est-à-dire $z_0 = 0$, avec une vitesse verticale initiale $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ à Lausanne où $\lambda = 0.80$ et $\cos \lambda = 0.69$. Au temps d'ascension T , la balle atteint sa hauteur maximale à vitesse verticale (11.37) nulle,

$$\dot{z}(T) = v_0 - gT = 0 \quad \text{ainsi} \quad T = \frac{v_0}{g} = \frac{10}{9.81} \text{ s} = 1.02 \text{ s} \quad (11.39)$$

La hauteur maximale atteinte par la balle est,

$$z(T) = -\frac{1}{2}gT^2 + v_0T = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 9.81} \text{ m} = 5.10 \text{ m} \quad (11.40)$$

La déviation de la balle due à la rotation propre de la terre lorsque la balle retombe au sol au temps $2T$ est,

$$y(2T) = -\frac{4}{3} \frac{v_0^3}{g^2} \Omega \cos \lambda = -\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 7.27 \cdot 10^{-5} \cdot 0.69}{3 \cdot 9.81^2} \text{ m} = -0.69 \text{ mm} \quad (11.41)$$

Vu que le signe de la déviation est négatif, elle a lieu vers l'ouest. Cette déviation, qui est environ quatre ordres de grandeur inférieure à la hauteur maximale, est négligeable en pratique.

11.1.3 Mouvement relatif horizontal

Dans un plan horizontal localement parallèle à la surface de la terre, c'est-à-dire $z = \text{cste}$, les équations du mouvement (11.28) se réduisent à,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\Omega \sin \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} &= -2\Omega \sin \lambda \dot{x} \end{aligned} \quad (11.42)$$

Comme les composantes de l'accélération (11.42) sont proportionnelles à $\sin \lambda$, cela implique que l'effet de la rotation de la terre – décrit par la force de Coriolis – sur le mouvement horizontal est nulle à l'équateur (c'est-à-dire $\lambda = 0$) et maximal aux pôles, c'est-à-dire (c'est-à-dire $\lambda = \pm \pi/2$). D'après les équations du mouvement relatif (11.42), le vecteur vitesse relative $\mathbf{v}_r(P)$ et le vecteur accélération relative $\mathbf{a}_r(P)$ d'un point matériel P , exprimés en composantes comme,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r(P) &= \dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{a}_r(P) &= \ddot{x} \hat{\mathbf{x}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (11.43)$$

sont orthogonaux,

$$\mathbf{v}_r(P) \cdot \mathbf{a}_r(P) = \dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} = 0 \quad (11.44)$$

comme dans le cas d'un mouvement circulaire. Les équations du mouvement (11.42) peuvent être exprimées en termes de la vitesse angulaire scalaire,

$$\omega = 2\Omega \sin \lambda \quad (11.45)$$

de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega \dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega \dot{x} \end{aligned} \quad (11.46)$$

Etant donné que la vitesse angulaire scalaire $\omega = 2\Omega \sin \lambda$ change de signe à l'équateur, cela signifie que le sens de rotation du mouvement circulaire s'inverse à l'équateur et que le rayon de courbure de ce mouvement diverge. Par conséquent :

1. Dans l'hémisphère nord, où $\lambda > 0$ alors $\sin \lambda > 0$ et ainsi $\omega > 0$: la rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre.
2. Dans l'hémisphère sud, où $\lambda < 0$ alors $\sin \lambda < 0$ et ainsi $\omega < 0$: la rotation se fait dans le sens trigonométrique.

3. A l'équateur, où $\lambda = 0$ alors $\sin \lambda = 0$ et ainsi $\omega = 0$: il n'y a plus de rotation.

Pour comprendre le comportement qualitatif du mouvement relatif horizontal, on considère quatre cas particuliers (Fig. 11.4).

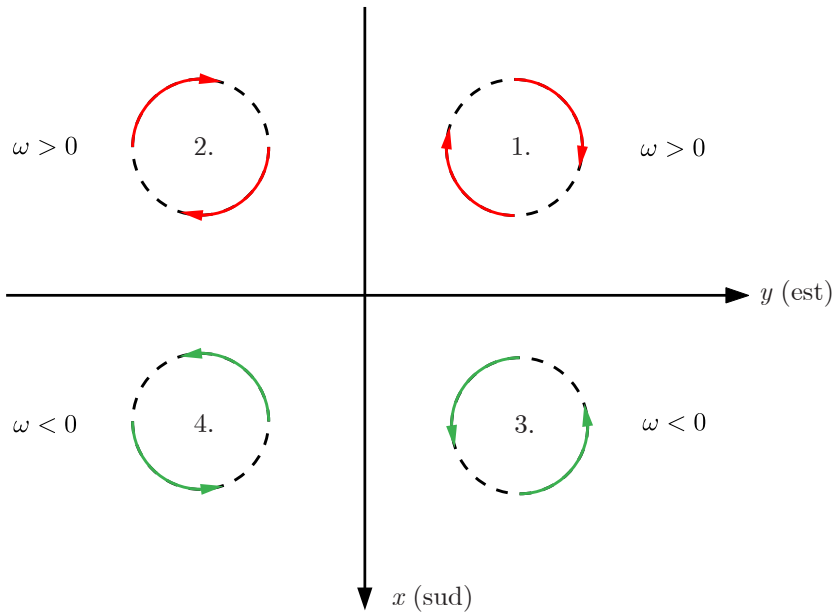


FIGURE 11.4 Les trajectoires du point matériel P tournent dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère nord (c'est-à-dire $\lambda > 0$) et dans le sens trigonométrique dans l'hémisphère sud (c'est-à-dire $\lambda < 0$).

Compte tenu des équations du mouvement (11.46), les trajectoires du point matériel P dans les quatre cas particuliers ci-dessous sont illustrées sur les quatre quadrants (Fig. 11.4).

1. Si $\omega > 0$ alors $\dot{y} > 0 \rightarrow \ddot{x} > 0$ et $\dot{y} < 0 \rightarrow \ddot{x} < 0$.
2. Si $\omega > 0$ alors $\dot{x} > 0 \rightarrow \ddot{y} < 0$ et $\dot{x} < 0 \rightarrow \ddot{y} > 0$.
3. Si $\omega < 0$ alors $\dot{y} > 0 \rightarrow \ddot{x} < 0$ et $\dot{y} < 0 \rightarrow \ddot{x} > 0$.
4. Si $\omega < 0$ alors $\dot{x} > 0 \rightarrow \ddot{y} > 0$ et $\dot{x} < 0 \rightarrow \ddot{y} < 0$.

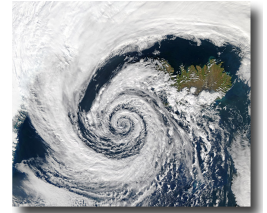
En observant les trajectoires qualitatives des mouvements relatifs horizontaux à la surface de la terre (Fig. 11.4), on constate que l'effet de la force de Coriolis due à la rotation de la terre est de dévier la trajectoire du point matériel P dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère nord (c'est-à-dire $\lambda > 0$) et dans le sens trigonométrique dans l'hémisphère sud (c'est-à-dire $\lambda < 0$). La force de Coriolis est responsable de la formation de cyclones bien visibles en regardant une image prise par un satellite en orbite géostationnaire. Dans un **cyclone**, la trajectoire des nuages est même une spirale due à la présence d'un gradient de pression entre le centre et l'extérieur. Comme la force de Coriolis est nulle à l'équateur, les masses d'air sont poussées des zones tropicales des hémisphères nord et sud vers l'équateur – qui joue le rôle d'attracteur – ce qui donne lieu à la formation d'un vent tropical appelé **alizé**.

11.2 Pendule de Foucault

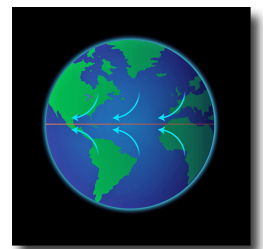
En 1851, Léon Foucault a démontré expérimentalement la rotation de la terre à l'aide d'un pendule suspendu au sommet du dôme du Panthéon à Paris. Le pendule de Foucault du Panthéon est constitué d'une masse $m = 28 \text{ kg}$ suspendue à un fil d'une longueur $\ell = 67 \text{ m}$. L'amplitude des oscillations est faible par rapport à la longueur du pendule. Compte tenu de la relation (6.35), la période d'oscillation est $T = 16 \text{ s}$ (Fig. 11.5). Le principe de fonctionnement du pendule est le suivant. Par rapport au référentiel absolu fixe, le plan d'oscillation vertical du pendule est fixe. Comme la terre est en rotation sur elle-même, le



Mouvements relatifs circulaires



Cyclone



Alizé



Léon Foucault

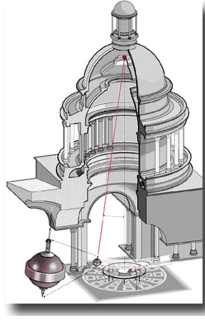
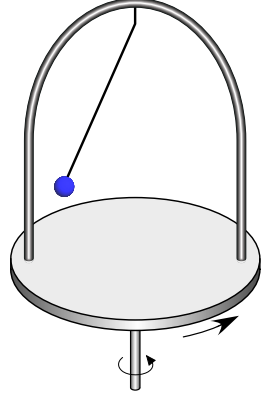
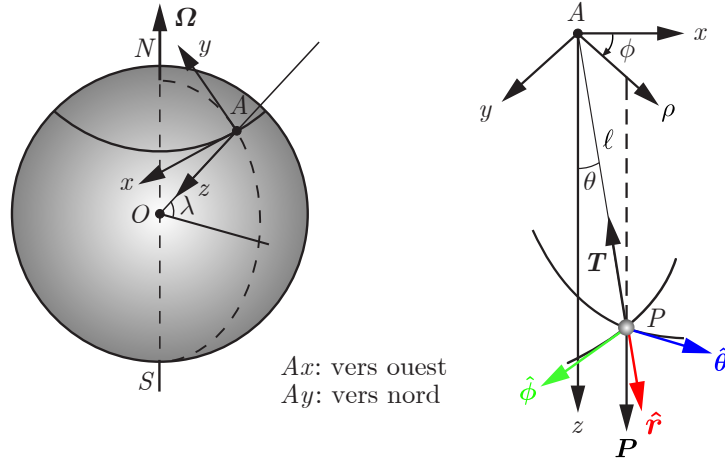


FIGURE 11.5 Pendule de Foucault au Panthéon, à Paris.

Rotation du plan
d'oscillation

Pour décrire le mouvement du pendule de Foucault, on prend la loi du mouvement relatif vertical (11.24) et on ajoute au poids $\mathbf{P}$ du point matériel P la tension $\mathbf{T}$ exercée dans le fil,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (11.47)$$

FIGURE 11.6 Repère relatif $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ et angles θ et ϕ qui permettent de définir des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) de manière usuelle.

Afin de tenir compte des symétrie du mouvement, on exprime les vecteurs $\hat{y}$ et $\hat{z}$ en termes des vecteurs $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$ du repère sphérique attaché au point matériel P à l'aide du vecteur auxiliaire $\hat{\rho}$ du repère cylindrique (Fig. 11.7),

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \\ \hat{\rho} &= \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} \\ \hat{y} &= \cos \phi \hat{\phi} + \sin \phi \hat{\rho} = \sin \phi \sin \theta \hat{r} + \sin \phi \cos \theta \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \end{aligned} \quad (11.48)$$

Etant donné que l'angle d'oscillation θ est faible, c'est-à-dire $\theta \ll 1$ et que les vitesses angulaires Ω et $\dot{\phi}$ sont également faibles, au 1^{er} ordre en θ , Ω et $\dot{\phi}$ on néglige les termes du 2^e ordre, c'est-à-dire les termes en θ^2 , Ω^2 , $\dot{\phi}^2$, $\theta \Omega$, $\theta \dot{\phi}$ et $\Omega \dot{\phi}$. De plus, au 1^{er} ordre en θ , on fait les approximations suivantes, $\sin \theta = \theta$ et $\cos \theta = 1$. Ainsi, les vecteurs (11.48) se réduisent au 1^{er} ordre à,

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \hat{r} - \theta \hat{\theta} \\ \hat{y} &= \theta \sin \phi \hat{r} + \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \end{aligned} \quad (11.49)$$

En tenant compte des approximations (11.49), le poids $\mathbf{P}$ et la tension dans le fil $\mathbf{T}$ sont

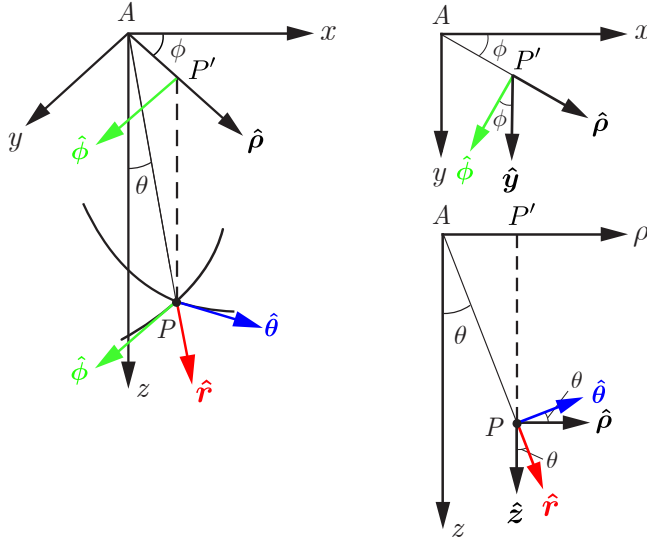


FIGURE 11.7 Illustrations auxiliaires pour établir l'expression des projections de vecteurs unités.

exprimés dans le repère sphérique relatif comme (Fig. 11.6),

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= m \mathbf{g} = mg \hat{\mathbf{z}} = mg (\hat{\mathbf{r}} - \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mathbf{T} &= -T \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (11.50)$$

et la vitesse angulaire s'écrit,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \Omega \cos \lambda \hat{\mathbf{y}} - \Omega \sin \lambda \hat{\mathbf{z}} = \Omega \cos \lambda (\theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}) - \Omega \sin \lambda (\hat{\mathbf{r}} - \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= -\Omega \sin \lambda \hat{\mathbf{r}} + \Omega \cos \lambda \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \Omega \cos \lambda \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (11.51)$$

où les deux termes qui ont été négligés sont des termes du deuxième ordre proportionnels à $\theta \Omega$. Il y a deux contraintes géométriques : la longueur constante ℓ du pendule et la vitesse angulaire de rotation constante $\dot{\phi}$ du plan vertical d'oscillation,

$$\begin{aligned} r &= \ell = \text{cste} & \text{ainsi} & \quad \dot{r} = 0 & \text{et} & \quad \ddot{r} = 0 \\ \dot{\phi} &= \text{cste} & \text{ainsi} & \quad \ddot{\phi} = 0 \end{aligned} \quad (11.52)$$

Compte tenu des contraintes (11.52), les vecteurs vitesse relative (5.18) et accélération relative (5.20) se réduisent au 1^{er} ordre à,

$$\mathbf{v}_r(P) = \ell \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_r(P) = -\ell \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + \ell \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2\ell \dot{\theta} \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (11.53)$$

Par conséquent, à l'aide de la vitesse angulaire (11.51) et de la vitesse relative (11.53), la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$ s'exprime au 1^{er} ordre comme,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) = -2m \left(-\Omega \sin \lambda \hat{\mathbf{r}} + \Omega \cos \lambda \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \Omega \cos \lambda \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \times \ell \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= 2m \ell \dot{\theta} \Omega \cos \lambda \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + 2m \ell \dot{\theta} \Omega \sin \lambda \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (11.54)$$

En projetant la loi vectorielle du mouvement relatif (11.47) selon les lignes de coordonnées relatives de vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{z}}$ respectivement, compte tenu du poids et de la tension (11.50), de la force de Coriolis (11.54) ainsi que de l'accélération relative (11.53), on obtient trois équations scalaires,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : & \quad mg - T + 2m \ell \dot{\theta} \Omega \cos \lambda \cos \phi = -m \ell \dot{\theta}^2 \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : & \quad -mg \theta = m \ell \ddot{\theta} \\ \text{selon } \hat{\mathbf{z}} : & \quad 2m \ell \dot{\theta} \Omega \sin \lambda = 2m \ell \dot{\theta} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (11.55)$$

La première équation (11.55) donne la norme T de la tension dans le fil,

$$T = m \left(g + \ell \dot{\theta}^2 + 2\ell \dot{\theta} \Omega \cos \lambda \cos \phi \right) \quad (11.56)$$

où le second terme rend compte de la force centrifuge due à l'oscillation du pendule et le dernier terme rend compte de la force de Coriolis due à l'oscillation du pendule et à la rotation de la terre. La deuxième équation (11.55) est l'équation d'un mouvement harmonique oscillatoire de faible amplitude autour de la position d'équilibre $\theta = 0$,

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad \text{où} \quad \omega^2 = \frac{g}{\ell} \quad (11.57)$$

La dernière équation exprime la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ de rotation du plan vertical d'oscillation du pendule en terme de la vitesse angulaire Ω de rotation de la terre sur elle-même,

$$\dot{\phi} = \Omega \sin \lambda \quad (11.58)$$

Ainsi, la période de rotation de plan vertical d'oscillation du pendule de Foucault est,

$$T = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} \quad (11.59)$$

Par conséquent, la période de rotation est minimale au pôle nord où $\lambda = \pi/2$ et $\sin \lambda = 1$,

$$T = \frac{2\pi}{7.27 \cdot 10^{-5}} \text{ s} = 24 \text{ h} \quad (\text{pôle nord}) \quad (11.60)$$

car la force de Coriolis est maximale. La période de rotation est infinie à l'équateur, où $\lambda = 0$ et $\sin \lambda = 0$,

$$T = \infty \quad (\text{équateur}) \quad (11.61)$$

car la force de Coriolis est nulle et le plan vertical d'oscillation du pendule ne tourne plus. La période de rotation à Lausanne, où $\lambda = 0.80$ et $\sin \lambda = 0.72$, vaut,

$$T = \frac{2\pi}{7.27 \cdot 10^{-5} \cdot 0.72} \text{ s} = 33.3 \text{ h} \quad (\text{Lausanne}) \quad (11.62)$$

et ainsi la vitesse angulaire du plan d'oscillation est (Fig. 11.8),

$$\dot{\phi} = \frac{360^\circ}{33.3} \text{ h}^{-1} = 10.8^\circ \text{ h}^{-1} \quad (\text{Lausanne}) \quad (11.63)$$

Le mouvement de rotation propre de la terre donne lieu à la rotation du plan d'oscillation

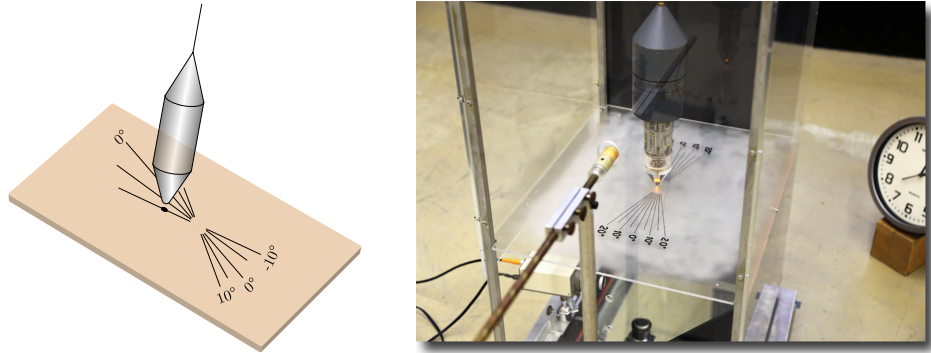


FIGURE 11.8 Le plan d'oscillation vertical tourne d'un angle de 10.9° par heure dans la direction des aiguilles d'une montre à Lausanne.

d'un pendule mathématique. Au pôle nord, ce plan d'oscillation n'a pas de mouvement de rotation par rapport au plan du système solaire. Par conséquent, comme la terre tourne dans le sens trigonométrique en vue d'avion avec une période d'oscillation d'un jour, le pendule tournera par rapport à la terre dans le sens des aiguilles d'une montre avec la même période. Au pôle sud, c'est exactement l'inverse. A l'équateur, il n'y a pas de mouvement de rotation, donc une période de rotation infinie.

11.3 Système de points matériels

Au chapitre 14.25, pour analyser les collisions entre points matériels, on a introduit la notion de système constitué d'un ensemble de points matériels. On adopte la convention usuelle qui consiste à dénoter ces points matériels par une lettre grecque, par exemple l'indice α . L'évolution temporelle du système de points matériels est déterminé par le mouvement des points matériels P_α de masse m_α .

11.3.1 Centre de masse

La masse totale d'un système constitué de points matériels P_α de masse m_α est la somme de leur masses,

$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \quad (11.64)$$

On considère un repère quelconque d'origine O associé à un référentiel d'inertie. Le **centre de masse** ou le **barycentre** G du système est la position moyenne de ces points matériels P_α pondérée par leur masse m_α ,

$$\mathbf{OG} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \quad (11.65)$$

La définition (11.65) du centre de masse G du système de points matériels P_α est indépendante du choix de l'origine O du repère. Pour le démontrer, on considère un autre repère d'origine O' et on appelle G' le centre de masse du système de points matériels P_α exprimé par rapport à ce repère. On montre alors que les centre de masse coïncident, c'est-à-dire $G' = G$. En effet, compte tenu des définitions de la masse (11.64) et du centre de masse (11.65), on parvient à la conclusion de l'équivalence des centres de masses,

$$\begin{aligned} \mathbf{O}'\mathbf{G}' &= \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{O}'\mathbf{P}_{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{O}'\mathbf{O} + \mathbf{OP}_{\alpha}) \\ &= \left(\frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) \mathbf{O}'\mathbf{O} + \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} = \mathbf{O}'\mathbf{O} + \mathbf{OG} = \mathbf{O}'\mathbf{G} \end{aligned} \quad (11.66)$$

11.3.2 Cinématique d'un système de points matériels

A présent, on établit les relations cinématiques fondamentales pour un système de points matériels. Le référentiel par rapport auquel le centre de masse est au repos s'appelle **référentiel du centre de masse**. Pour adopter la même convention d'écriture que celle utilisée au chapitre 14.25 pour traiter du problème à deux corps, on définit les vecteurs position du centre de masse $\mathbf{R}_G$, position $\mathbf{r}_\alpha$ et position relative $\mathbf{r}'_\alpha$ du point matériel P_α comme,

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{OG} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{OP}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{GP}_\alpha \quad (11.67)$$

Compte tenu des définitions (11.67), on obtient l'identité géométrique,

$$\mathbf{OP}_\alpha = \mathbf{OG} + \mathbf{GP}_\alpha \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R}_G + \mathbf{r}'_\alpha \quad (11.68)$$

La position du centre de masse (11.65) peut être exprimée en terme des vecteurs (11.67) comme,

$$\mathbf{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \quad (11.69)$$

A l'aide des relations (11.68) et (11.69), on établit l'identité suivante,

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_\alpha = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}_G) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha - M \mathbf{R}_G = \mathbf{0} \quad (11.70)$$

Les vecteurs vitesse du centre de masse $\mathbf{V}_G$, vitesse $\mathbf{v}_\alpha$ et vitesse relative $\mathbf{v}'_\alpha$ du point matériel P_α sont définis comme,

$$\mathbf{V}_G = \dot{\mathbf{R}}_G \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{v}'_\alpha = \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \quad (11.71)$$

Compte tenu des définitions (11.71), la dérivée temporelle de la relation (11.68) entre les vecteurs positions s'écrit,

$$\dot{\mathbf{r}}_\alpha = \dot{\mathbf{R}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V}_G + \mathbf{v}'_\alpha \quad (11.72)$$

La vitesse du centre de masse est obtenue en prenant la dérivée temporelle de la position (11.65) du centre de masse,

$$\dot{\mathbf{R}}_G = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{V}_G = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad (11.73)$$

A l'aide des relations (11.72) et (11.73), on établit l'identité suivante,

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{V}_G) = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha - M \mathbf{V}_G = \mathbf{0} \quad (11.74)$$

Les vecteurs accélération du centre de masse $\mathbf{A}_G$, accélération $\mathbf{a}_\alpha$ et accélération relative $\mathbf{a}'_\alpha$ du point matériel P_α sont définis comme,

$$\mathbf{A}_G = \dot{\mathbf{V}}_G \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_\alpha = \dot{\mathbf{v}}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{a}'_\alpha = \dot{\mathbf{v}}'_\alpha \quad (11.75)$$

Compte tenu des définitions (11.75), la dérivée temporelle de la relation (11.72) entre les vecteurs vitesses s'écrit,

$$\dot{\mathbf{v}}_\alpha = \dot{\mathbf{V}}_G + \dot{\mathbf{v}}'_\alpha \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{A}_G + \mathbf{a}'_\alpha \quad (11.76)$$

L'accélération du centre de masse est obtenue en prenant la dérivée temporelle de la vitesse (11.73) du centre de masse,

$$\dot{\mathbf{V}}_G = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\mathbf{v}}_\alpha \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{A}_G = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{a}_\alpha \quad (11.77)$$

A l'aide des relations (11.76) et (11.77), on établit l'identité suivante,

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{a}'_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{a}_\alpha - \mathbf{A}_G) = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{a}_\alpha - M \mathbf{A}_G = \mathbf{0} \quad (11.78)$$

11.3.3 Dynamique d'un système de points matériels

Après avoir établi les relations cinématiques fondamentales pour un système de points matériels, on établit les relations dynamiques fondamentales. D'après la définition (2.29), la quantité de mouvement d'un point matériel P_α s'écrit,

$$\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad (11.79)$$

et d'après la définition (9.1), le moment cinétique du point matériel P_α évalué par rapport au point O s'écrit,

$$\mathbf{L}_{O,\alpha} = \mathbf{OP}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha \quad (11.80)$$

D'après la définition (9.2), le moment de force résultant exercé par la force résultante $\mathbf{F}_\alpha$ sur le point matériel P_α s'écrit,

$$\mathbf{M}_{O,\alpha} = \mathbf{OP}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha \quad (11.81)$$

La force résultante $\mathbf{F}_\alpha$ et le moment de force résultant $\mathbf{M}_{O,\alpha}$ appliqués sur le point matériel P_α sont extérieurs à P_α mais peuvent être intérieurs au système de points matériels. La 2^e loi de Newton (2.17) et le théorème du moment cinétique (11.95) appliqués au point matériel P_α s'écrivent,

$$\dot{\mathbf{p}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{L}}_{O,\alpha} = \mathbf{M}_{O,\alpha} \quad (11.82)$$

où $\mathbf{F}_\alpha$ est la force résultante et $\mathbf{M}_{O,\alpha}$ est le moment de force résultant exercés sur le point matériel P_α . Pour un système de points matériels, la 3^e loi de Newton (8.1) s'écrit,

$$\mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} = -\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \quad \forall \quad \alpha, \beta \quad (11.83)$$

A présent, on doit distinguer les forces et les moments de force intérieurs et extérieurs au système de points matériels. La somme des forces intérieures résultantes $\mathbf{F}_\alpha^{\text{int}}$ exercées sur

l'ensemble des points matériels P_α , s'exprime en termes des forces $\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha}$ exercées par les points matériels P_β sur les points matériels P_α . Compte tenu de la 3^e loi de Newton (11.83), cette somme s'annule,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta | \beta \neq \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta | \beta > \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta | \beta < \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \\ &\stackrel{\alpha \leftrightarrow \beta}{=} \sum_{\alpha} \sum_{\beta | \beta > \alpha} \left(\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \right) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (11.84)$$

Ainsi, la somme des forces intérieures $\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}}$ ne contribue pas à la dynamique du centre de masse du système qui est entièrement déterminée par la somme des forces extérieures $\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$. De plus, la force intérieure $\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha}$ exercée par le point matériel P_β sur le point matériel P_α est orientée selon l'axe qui lie ces points matériels afin de satisfaire la 3^e loi de Newton (11.83), ce qui implique que,

$$\mathbf{P}_{\beta} \mathbf{P}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = \mathbf{0} \quad \forall \quad \alpha, \beta \quad (11.85)$$

D'après la définition (11.81), la somme des moments de forces intérieures $\mathbf{M}_{O,\alpha}^{\text{int}}$ exercés sur l'ensemble des points matériels P_α évaluée par rapport au point O , s'exprime en termes des forces intérieures $\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}}$ exercées sur l'ensemble des points matériels P_α . D'après les équations (11.84), elle s'exprime en fin de compte en termes des forces $\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha}$ exercées par les points matériels P_β sur les points matériels P_α . Compte tenu de la 3^e loi de Newton (11.83) et de la condition (11.85),

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \mathbf{M}_{O,\alpha}^{\text{int}} &= \sum_{\alpha} \mathbf{O} \mathbf{P}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta | \beta \neq \alpha} \mathbf{O} \mathbf{P}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta | \beta > \alpha} \mathbf{O} \mathbf{P}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta | \beta < \alpha} \mathbf{O} \mathbf{P}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \\ &\stackrel{\alpha \leftrightarrow \beta}{=} \sum_{\alpha} \sum_{\beta | \beta > \alpha} \left(\mathbf{O} \mathbf{P}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \mathbf{O} \mathbf{P}_{\beta} \times \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta | \beta > \alpha} (\mathbf{O} \mathbf{P}_{\alpha} - \mathbf{O} \mathbf{P}_{\beta}) \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta | \beta > \alpha} \mathbf{P}_{\beta} \mathbf{P}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (11.86)$$

Ainsi, la somme des moments de forces intérieures $\sum_{\alpha} \mathbf{M}_{\alpha}^{\text{int}}$ ne contribuent pas à la dynamique du centre de masse du système qui est entièrement déterminée par la somme des moments de forces extérieures $\sum_{\alpha} \mathbf{M}_{\alpha}^{\text{ext}}$.

La quantité de mouvement totale $\mathbf{P}$ et le moment cinétique total $\mathbf{L}_O$ évalué par rapport au point O sont définis comme,

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_O = \sum_{\alpha} \mathbf{L}_{O,\alpha} \quad (11.87)$$

Compte tenu de la quantité de mouvement (11.79) d'un point matériel P_α , de la relation (11.72) entre les vitesses, de la masse (11.64) du système et de la quantité de mouvement relative totale (11.74), la quantité de mouvement totale devient,

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{V}_G + \mathbf{v}'_{\alpha}) = M \mathbf{V}_G + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} = M \mathbf{V}_G \quad (11.88)$$

Par conséquent, la quantité de mouvement du système de points matériels P_α est portée par son centre de masse auquel on peut attribuer toute la masse du système. Ce résultat est capital sur le plan théorique puisqu'il justifie le modèle du point matériel. La somme des forces extérieures $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ et la somme des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ exercés sur le système et évalués au point O s'écrivent,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \equiv \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \equiv \sum_{\alpha} \mathbf{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} \quad (11.89)$$

Compte tenu de la 2^e de Newton (11.82), de la 3^e loi de Newton (11.89), de la quantité de mouvement totale (11.87), de la somme des forces intérieures (11.84), de la somme des forces extérieures (11.89) et du fait que les forces $\mathbf{F}_{\alpha}$ sont soit des forces intérieures $\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}}$

soit des forces extérieures $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement totale du système s'écrit,

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \cancel{\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}}} + \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (11.90)$$

Ainsi, le théorème de la quantité de mouvement du système de points matériels s'énonce comme suit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{P}} \quad (11.91)$$

La masse totale M d'un système fermé de points matériels est constante. Ainsi, compte tenu de l'accélération du centre de masse (11.75) et de la quantité de mouvement totale (11.88) pour un système fermé, le théorème de la quantité de mouvement (11.91) pour un système fermé devient,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{P}} = \cancel{M \dot{\mathbf{V}}_G} + M \dot{\mathbf{V}}_G = M \mathbf{A}_G \quad (11.92)$$

Ainsi, pour un système fermé de points matériels de masse constante, le théorème du centre de masse du système de points matériels s'énonce comme suit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = M \mathbf{A}_G \quad (11.93)$$

Compte tenu du théorème du centre du centre masse (11.82), du moment cinétique total (11.87) de la somme des moments de forces intérieures (11.86), de la somme des moments de forces extérieures (11.89) et du fait que les moments de forces $\mathbf{M}_{\alpha}$ sont soit des moments de forces intérieures $\mathbf{M}_{\alpha}^{\text{int}}$ soit des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_{\alpha}^{\text{ext}}$, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement totale du système évalué par rapport au point O s'écrit,

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{L}}_{O,\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{M}_{O,\alpha} = \sum_{\alpha} \cancel{\mathbf{M}_{O,\alpha}^{\text{int}}} + \sum_{\alpha} \mathbf{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} = \sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \quad (11.94)$$

Ainsi, le théorème du moment cinétique du système de points matériels évalué par rapport au point O s'énonce comme suit,

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O \quad (11.95)$$

11.3.4 Principes de conservation

Les théorèmes de la quantité de mouvement (11.91) et du moment cinétique (11.95) nous permettent d'énoncer deux **principes de conservation** pour un système isolé. Si le système est isolé ou que la somme des forces extérieures est nulle, le théorème de la quantité de mouvement implique que la quantité de mouvement totale est **conservée**,

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{P} = \text{cste} \quad (11.96)$$

ce qui signifie que la quantité de mouvement totale est une **constante du mouvement**. Si le système est isolé ou que la somme des moments de forces extérieures est nul, le théorème du moment cinétique implique que le moment cinétique total est **conservé**,

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{L}_O = \text{cste} \quad (11.97)$$

ce qui signifie que le moment cinétique total est une **constante du mouvement**. Les principes de conservation de la quantité de mouvement (11.96) et du moment cinétique (11.97) dépassent largement le cadre la mécanique classique puisqu'ils sont valables en mécanique quantique et en relativité générale. En réalité, si le système physique est invariant par translation, la quantité de mouvement totale $\mathbf{P}$ est une constante du mouvement, et s'il est invariant par rotation autour du point O , le moment cinétique total $\mathbf{L}_O$ est une constante du mouvement. A titre d'exemple, on peut mentionner la conservation de la quantité de mouvement totale d'un système constitué d'une arme à feu et d'une balle lors d'un tir qui donne lieu à un effet de recul. On peut aussi mentionner la conservation du moment cinétique total d'une patineuse lors d'un mouvement de rotation sur la glace.



Tir d'arme à feu



Patineuse en rotation